

# L'infini dans la théorie ergodique\*

Laurent Jodoin\*\*

## Résumé

*En mécanique statistique, un système physique est représenté par un système mécanique avec un très grand nombre de degrés de liberté. Ce qui est expérimentalement accessible, croit-on, se limite à des moyennes temporelles sur de longues périodes. Or, il est bien connu qu'un système physique tend vers un équilibre thermodynamique. Ainsi, les moyennes temporelles censées représenter les résultats de mesure doivent être indépendantes du temps. C'est pourquoi elles sont associées à des temps infinis. Ces moyennes sont par contre difficilement analysables, et c'est pourquoi la moyenne des phases est utilisée. La justification de l'égalité de la moyenne temporelle infinie et de la moyenne des phases est le problème ergodique. Ce problème, sous une forme ou une autre, a fait l'objet d'études de la part de Boltzmann (1868 ; 1872), les Ehrenfest (1912), Birkhoff (1831), Khinchin (1949), et bien d'autres, jusqu'à devenir une théorie à part entière en mathématique (Mackey 1974). Mais l'introduction de temps infinis pose des problèmes physiques et philosophiques d'importance. En effet, si l'infini a su trouver une nouvelle place dans les mathématiques cantorienne, sa place en physique n'est pas aussi assurée. Je propose donc de présenter les développements conceptuels entourant la théorie ergodique en mécanique statistique avant de me concentrer sur les problèmes épistémologiques que soulève la notion d'infini dans ces mêmes développements.*

---

\* L'auteur remercie Yvon Gauthier pour ses remarques pertinentes et utiles à la composition de cet article.

\*\* L'auteur est étudiant au doctorat (Université de Montréal / Université de Paris I, Panthéon-Sorbonne (IHPSI)).

## Introduction

La physique du XIX<sup>e</sup> siècle a connu deux théories phares : la mécanique, issue des travaux de Isaac Newton et généralisée en formalisme par Pierre Simon de Laplace et Joseph-Louis Lagrange, et la thermodynamique, issue des travaux de Sadi Carnot et développée par Rudolf Clausius, James Prescott Joule et William Thomson. Complémentaires à bien des égards, elles s'opposaient aussi parfois. La mécanique statistique est née de cette tension (Barberousse 2002).

L'objet de la mécanique statistique est de dériver des lois macroscopiques à partir de lois microscopiques sous-jacentes. Elle est fondée sur l'utilisation des *probabilités*, laquelle est justifiée par l'énormité du nombre d'Avogadro associé à la quantité de systèmes microscopiques. Elle a cette particularité de fournir des méthodes « rationnelles » pour traiter des comportements de systèmes mécaniques dont nos connaissances de leur état sont moindres que celles qui seraient théoriquement possibles d'obtenir. En ce sens, l'idée de la description d'un état (total) précis est dans tous les cas un « concept limite abstrait<sup>1</sup>».

Un problème fondamental de la mécanique statistique est son *empiricité* car il est difficile d'y prendre contact avec l'expérience. Deux raisons principales sont à la base de ce problème. Dans un premier temps, il est impossible de vérifier l'attribution des propriétés mécaniques aux sous-systèmes à l'étude en raison de leur très grand nombre. Dans un second temps, le comportement des systèmes thermodynamiques composés de sous-systèmes n'est pas proprement reproductible, car l'état initial de ces systèmes n'est pas mesurable. Une solution, avancée par Josiah Willard Gibbs, consiste à considérer plusieurs « copies » de systèmes macroscopiques semblables dont les états microscopiques peuvent varier – les *ensembles de Gibbs*.

Il s'agit donc de faire beaucoup avec peu. L'une des tâches de cette théorie est bien évidemment de déterminer l'évolution des quantités physiques dynamiques, particulièrement à l'équilibre où l'expérience nous dit que les systèmes tendent à s'y maintenir. Pour ce faire, la physique (ou plutôt les physiciens) a parfois recours à l'infini. Il y a d'abord les *temps infinis* utilisés dans la justification (ou sa

---

<sup>1</sup> Richard C. TOLMAN, *The Principles of Statistical Mechanics*, London, Oxford University Press, 1938 (1950), p.1.

tentative) de l'égalité des moyennes en phase (relatives au volume d'une région de l'espace des phases) et des moyennes temporelles (relatives au temps passé dans un région)<sup>2</sup>. Il y a ensuite les *systèmes infinis* utiles, conceptuellement, entre autres à la distinction entre états microscopique et macroscopique.

Or, il est loin d'être évident que l'infini ait une signification précise, voire un rôle déterminé, en physique. Déjà les Grecs rejetaient le « mauvais infini » (itératif au sens de Hegel), celui conçu comme résultat et à plus forte raison comme valeur inscrite dans une formule mathématique. Alors comment un concept séculaire comme l'infini peut-il éclairer un débat contemporain en physique ?

### Mécanique statistique

Pour un système physique (mécanique) composé de  $N$  sous-systèmes microscopiques, l'*espace des phases*  $\Gamma$  est un espace conceptuel euclidien de dimensions  $2N$  constitué de deux axes orthogonaux, l'un pour les coordonnées  $q_1, \dots, q_N$  et un pour les moments  $p_1, \dots, p_N$ . L'état instantané d'un système dans l'ensemble peut être considéré comme un *point représentatif* dans  $\Gamma$ , tel que  $x = (q_1, p_1 ; \dots ; q_N, p_N)$ . Un *ensemble de systèmes*, ou *ensemble de Gibbs*, est une collection de systèmes (indépendants) de même structure qu'un système à l'étude, ou sujet à la même expérimentation, mais distribués à l'intérieur d'une gamme d'états possibles. La condition de l'ensemble des systèmes, comme un tout, peut être considéré comme une *région* (« cloud »). La fraction des membres de l'ensemble qui sont dans une région  $A \in \Gamma$  correspond à la probabilité  $P(A)$  que le système soit dans cette région, c'est-à-dire dans cette condition. Ainsi, la densité de distribution statistique  $\rho(x)$  est une fonction à  $2N$  coordonnées et moments, qui détermine la probabilité d'un état spécifique formant un sous-ensemble  $A \in \Gamma$ , tel que  $P(A) = \int_A \rho(x) dx$  et  $P(\Gamma) = 1$ .

Ainsi, un système physique, comme un gaz dans un contenant rigide, est représenté par un système mécanique avec un très grand nombre de degrés de liberté. Toute quantité physique est fonction des variables dynamiques du système, c'est-à-dire de son espace des

---

<sup>2</sup> Ces concepts seront explicités plus loin.

phases. Toutefois, les expériences ou les observations de telles quantités physiques ne rapportent pas les valeurs instantanées de ces mêmes quantités physiques. Plutôt, chaque mesure ou observation doit durer un certain temps qui peut paraître très court à l'échelle humaine, mais qui est très long à l'échelle microscopique où les états subissent de nombreux changements, en raison, par exemple, des nombreuses collisions moléculaires. Par conséquent, ce qui est expérimentalement accessible se limite à des moyennes temporelles sur de longues périodes. De fait, la mesure d'une quantité thermodynamique (macroscopique) est supposée durer plus longtemps que le temps  $t_c$  requis pour la disparition des corrélations moléculaires (par exemple, les interactions à la collision), mais tout de même moins longtemps que le temps  $t_m$  maximum au cours duquel la quantité macroscopique ne change pas :  $t_c < t < t_m$ . Or, ce temps maximum peut être considéré comme *infini*.

### Théorie ergodique

À l'équilibre thermique, en raison du très grand nombre d'états microscopiques possibles, il est supposé que ces états ont tous la même probabilité d'occurrence. Cette situation d'équiprobabilité correspond à la *distribution microcanonique*. Dans un tel cas, l'hamiltonien  $H(x)$  demeure constant, et un point  $x$  se déplace dans  $\Gamma$  selon les lois de la dynamique classique. La trajectoire du point de phase est un chemin- $\mathfrak{C}$  dans  $\Gamma^3$ . Une transformation  $T_t$  (opérateur d'évolution), qui conserve la mesure selon le théorème de Liouville, transforme un point initial  $x_0$  en un point  $x$ , tel que  $T_t x_0 = x$ . Une fonction  $f$  de ce système hamiltonien définie dans  $\Gamma$  est telle que  $f(x_0, t) = f(x)$  car  $T_t x_0 = x$ . Cette fonction peut représenter une variable comme l'énergie. Une mesure ou observation implique donc une *moyenne temporelle* (infinie)

$$\bar{f}(x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_t x_0) dt$$

<sup>3</sup> Paul EHRENFEST et Tatiana EHRENFEST, *The conceptual foundations of the statistical approach in mechanics*, New York, Dover Publications inc., 1912 (1990).

Équation 1

Cependant, si  $f(\Gamma, x_0)$  est une fonction définie dans  $\Gamma$  et correspondant à une quantité thermodynamique donnée, alors l'équation précédente ne devrait pas dépendre de l'état initial (point de phase)  $x_0$ . En effet, chaque choix d'un point de phase initial conditionne une autre trajectoire dans  $\Gamma$  et, donc, une autre moyenne temporelle  $f^*$ . Mais si le système est à l'équilibre thermique, alors la moyenne temporelle est indépendante du temps ; il suffit que cette limite existe (premier théorème de Birkhoff). Même si l'état initial n'est pas à l'équilibre, la valeur moyenne de  $f$  est celle de l'équilibre si  $T \rightarrow \infty$ . Or, bien que les moyennes temporelles pour des temps (macroscopiques) suffisamment longs soient significatives et pertinentes, elles demeurent difficilement calculables, ou analysables. C'est pourquoi la *moyenne de phase*  $\langle f \rangle$ , qui représente la valeur attendue ou prévue, du système est utilisée :

$$\langle f \rangle = \int f(x) \rho(x) dx$$

Équation 2

Le problème, appelé *problème ergodique*, est donc de savoir si, ou à quelles conditions, la moyenne temporelle égale la moyenne de phase :

$$f^*(x_0) \stackrel{!}{=} \langle f \rangle$$

Équation 3

Cette égalité correspond à la condition d'*ergodicité*. Il y a toutefois des différences notables entre ces deux moyennes. D'abord, tel que mentionné,  $f^*$  dépend de l'état initial  $x_0$  contrairement à  $\langle f \rangle$ . Ensuite,  $\langle f \rangle$  dépend généralement du temps, alors que  $f^*$  est indépendante du temps ; en effet, l'intégration sur tous les temps  $T$  et la limite  $T \rightarrow \infty$  se chargent de cette indépendance (indirecte).

Cette égalité a été d'abord postulée implicitement (et différemment) par Ludwig Boltzmann (1868 ; 1871)<sup>4</sup> et a été nommée *hypothèse ergodique* par les Ehrenfest (1912). Ils auraient emprunté le nom au concept d'*ergode* introduit par Boltzmann (1884) et serait dérivé du grec *ergos* (travail) et *hodos* (chemin) (voir Uffink, 2006)<sup>5</sup>. Cette hypothèse stipule qu'un chemin- $\mathcal{C}$  dans l'espace des phases  $\Gamma$  passerait par tous les points de l'hypersurface d'énergie constante  $\Gamma_E$ . Ainsi, il y aurait un temps  $\tau$  tel que  $y = T_\tau x$ , où  $x, y \in \Gamma_E$ , et par conséquent  $f^*(x) = f^*(y)$ . En ce sens, l'égalité précédente diffère notablement de l'hypothèse ergodique attribuée à Boltzmann par les Ehrenfest. Il n'y a cependant aucune preuve que Boltzmann se soit directement appuyé sur cette hypothèse<sup>6</sup>.

En 1866, Boltzmann travaillait à une démonstration mécanique de la seconde loi de la thermodynamique. Peu de temps après, dans son article de 1868, il chercha à améliorer les résultats de Maxwell sur la distribution de probabilité stationnaire et sur la *Stoßzahlansatz* (hypothèse par rapport au nombre de collisions). Il cherchait donc à caractériser un gaz à l'équilibre thermique en termes de distribution de probabilité. Considérant un système composé de  $N$  particules représentées par un point de phase  $x$  dans l'espace des phases  $\Gamma$ , Boltzmann cherchait la probabilité (soit la proportion de temps sur une longue période) qu'un point représentatif soit dans une région  $dx$ . Il supposait alors que cette distribution est stationnaire. Mais cela n'est vrai que si « sur une longue période » est entendu au sens de temps infinis. Boltzmann, s'appuyant sur le théorème de Liouville, supposa que cette distribution stationnaire correspond à la distribution microcanonique. Il est alors en mesure, en intégrant cette dernière, de déterminer la probabilité conditionnelle que la composante en  $x$  du moment de la particule 1 ait une valeur entre  $p$

<sup>4</sup> Les références aux textes originaux de Boltzmann sont tirées de Barberousse (2002) et de UFFINK (2006).

<sup>5</sup> Les Ehrenfest (1912), dans la traduction anglaise, proposent « energy » et non pas « travail », et font remonter la première mention du terme à 1887, contrairement à 1884 (voir aussi Gallavotti 1994).

<sup>6</sup> Jos UFFINK, « Compendium of the foundations of classical statistical physics », 2006, in : Internet (2009).

et  $p + dp$ , étant données certaines valeurs des positions des particules du système.

Par ailleurs, Boltzmann a parfois laissé entendre qu'il considérait une structure discrète pour l'espace des phases ou l'hypersurface d'énergie. Mais rien n'indique qu'il ait effectivement procédé selon une telle hypothèse dans ses articles de 1871<sup>7</sup>. Dans l'un de ces articles, il discute le cas d'un oscillateur harmonique à deux dimensions soumis à un potentiel  $V(x, y) = ax^2 + by^2$  et limité à la surface d'un rectangle : si le rapport  $a/b$  est rationnel, la trajectoire est périodique, tandis que si ce rapport est irrationnel, la trajectoire traverse progressivement tous les points de la surface du rectangle (« *allmählich die ganze Fläche* »). Boltzmann soutient alors que  $x$  et  $y$  sont indépendants puisque pour chaque valeur de  $x$ , il y a une *infinité* de solutions pour  $y$ . Cela l'aurait amené à conclure erronément que la trajectoire traverse *tous* les points de la surface. En effet, comme le souligne Uffink (2006), Cantor a conjecturé que le continu contient une infinité non dénombrable de points –  $2 \exp(\aleph_0) = \aleph_1$ . Autrement dit, l'ensemble des irrationnels, comme celui des rationnels d'ailleurs, forme un sous-ensemble *dense* des réels (Hamilton 1982)<sup>8</sup>. Par conséquent, ce n'est pas l'ensemble des points de la surface qui est parcouru.

Les Ehrenfest (1912) ont identifié plusieurs problèmes relatifs à l'hypothèse ergodique selon Boltzmann. D'abord, la conception de probabilité de Boltzmann (comme volume relatif ou encore comme temps relatif) est ambiguë. Ensuite, il n'y a pas justification du statut privilégié de la distribution microcanonique ou des autres distributions ne dépendant que de l'Hamiltonien. Enfin, l'argument de Boltzmann, à l'effet que l'état microscopique d'un système qui n'est pas à l'équilibre devrait avoir une trajectoire qui tend à passer un temps largement majoritaire dans une région de l'espace des phases correspondant à un équilibre macroscopique, est faible. Puisqu'une solution plus ou moins satisfaisante à ces problèmes se trouvait dans l'hypothèse ergodique, les Ehrenfest ont donc supposé que Boltzmann s'appuyait sur cette hypothèse. Expriment leurs doutes

---

<sup>7</sup> *Ibid.*

<sup>8</sup> HAMILTON, A. G., *Numbers, sets and axioms. The apparatus of mathematics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1982.

quant à cette dernière, ils proposèrent plutôt l'*hypothèse quasi-ergodique* : la trajectoire est dense (elle passe arbitrairement près de chaque point) sur l'hypersurface d'énergie constante  $\Gamma_E$ . Toutefois, même cette hypothèse échoue à justifier que la distribution microcanonique constitue la seule distribution de probabilité stationnaire.

Les doutes des Ehrenfest ont été confirmés en 1913 par deux théorèmes dus indépendamment à Michel Plancherel et Artur Rosenthal. L'étude de l'hypothèse ergodique et de l'hypothèse quasi-ergodique n'a pas pour autant été abandonnée. Des travaux de Bernard O. Koopman ont permis des développements majeurs, notamment ceux de George D. Birkhoff (1931) et John von Neumann (1932). Ils ont tenté de déduire l'égalité de la moyenne temporelle infinie et de la moyenne des phases à partir des propriétés dynamiques du système physique, tel qu'exposé précédemment. La théorie qui tente de prouver cette égalité est la *théorie ergodique*. Cette théorie a connu des développements importants au cours du XX<sup>e</sup> siècle qui l'ont amené à devenir plus abstraite et formelle, en bref plus mathématisée.

Un *système dynamique* contient essentiellement deux parties : un *vecteur d'état* définissant l'état (espace et temps) d'un système réel ou hypothétique, et une *fonction* (une règle) déterminant l'évolution dans le temps d'un état donné. Un système dynamique abstrait est défini comme un *tuple*  $\langle \Gamma, \mathcal{A}, \mu, T \rangle$ , où  $\Gamma$  est un ensemble arbitraire,  $\mathcal{A}$  est une  $\sigma$ -algèbre de sous-ensembles (topologie) de  $\Gamma$ , appelé les ensembles « mesurables » dans  $\Gamma$ ,  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $\Gamma$ , et  $T$  renvoie à un groupe d'homéomorphismes  $T_t$  sur  $G$  (avec  $t \in \mathbb{R}$ ) représentant ainsi les opérateurs d'évolution, de sorte que  $T_t: \Gamma \rightarrow \Gamma$ . Les transformations  $T_t$  sont considérées comme conservant la mesure ou comme étant invariantes, soit  $\mu(T_t \mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A})$  pour tout  $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ . Comme le souligne Uffink<sup>9</sup>, dans le cas plus concret de la mécanique statistique, il convient de prendre  $\Gamma$  comme l'hypersurface d'énergie,  $\mathcal{A}$  la collection de ses sous-ensembles de Borel,  $\mu$  la mesure de probabilité microcanonique et  $T$  l'évolution induite par les équations d'Hamilton. D'après le théorème de Liouville, il s'ensuit qu'un tel système préserve la mesure.

---

<sup>9</sup> UFFINK, *op. cit.*, p.89-90.



Le théorème de Birkhoff stipule que la moyenne temporelle infinie d'une fonction de phase converge presque partout, c'est-à-dire que la convergence n'est pas valide seulement pour un ensemble de points ayant un ensemble théorique de mesure égal à zéro. Autrement dit, l'Équation 1 existe pour presque tout  $x$  (autrement les états  $x$  ont une mesure égale à 0) et l'égalité  $f^* = \langle f \rangle$  tient à une condition près. Cette condition est l'*indécomposabilité métrique* ou *transitivité métrique*. Un système dynamique, comme ensemble, est dit métriquement indécomposable s'il est impossible de le décomposer en deux sous-ensembles de mesure positive invariante : pour toute partition de  $\Gamma$  en des sous-ensembles  $A_1$  et  $A_2$  tel que  $T_t A_1 = A_1$  et  $T_t A_2 = A_2$  pour tout  $t$ ,  $\mu(A_1) = 0$  ou  $\mu(A_2) = 0$ . Autrement dit, cela revient à poser la condition de l'impossibilité de diviser l'ensemble (système dynamique) en sous-ensembles ayant une mesure positive, de telle sorte qu'une trajectoire partant dans l'un d'eux y reste. On peut montrer que l'indécomposabilité métrique est une condition nécessaire et suffisante à l'ergodicité. Khinchin (1949) a par ailleurs tenté de montrer que l'on pouvait se passer de cette condition pour les systèmes physiques d'intérêt.

### La question de l'infini

La question de l'infini traverse l'histoire de la philosophie. Comme elle a été au centre de questionnements métaphysiques, épistémologiques et spirituels, ce n'est donc pas surprenant d'y trouver une multiplicité de sens. On peut d'ailleurs aisément distinguer quatre contenus sémantiques à l'infini<sup>10</sup> : l'*infini privatif*, comme l'étymologie l'indique en grec où le *a* privatif de *apeiron* (mais aussi en latin *in-finitum*) désigne ce qui est à la fois indéterminé et illimité, mais aussi ce qui est informe et préexistant à toute détermination ; l'*infini actuel*, synonyme d'absolu, même s'il reste négatif pour notre esprit fini, et puisque l'infini est au-delà de l'être et de la forme, il conduit la pensée au seuil de l'ineffable ; l'*infini opératoire* désignant un processus dont la loi structurante ne contient aucun principe de limitation, mais aussi un schéma opératoire désignant le

---

<sup>10</sup> Jean SEIDENGART, « Infini » dans Dominique LECOURT (éd.), *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences*, Paris, Quadrige-PUF, 1999 (2003).

dépassement incessant de tout résultat fini vers une totalisation qu'on ne peut effectuer ; et enfin l'*infini comme donnée intuitive ineffaçable*, c'est-à-dire que la perception semble demander l'intuition de la continuité illimitée de l'espace ainsi que la possibilité de séries temporelles infinies.

Dans le cas qui nous concerne, l'infini mathématique est le plus approprié. En fait, dès les premiers développements des mathématiques, la notion d'infini était présente ; que ce soit, par exemple, Zénon d'Élée avec ses paradoxes sur la divisibilité à l'infini d'un segment de droite, ou Pythagore avec l'incommensurabilité de la diagonale du carré. Dans la suite des entiers naturels, laquelle n'a pas de fin, deux choses ont été très tôt distinguées. D'une part, un *processus*, celui d'engendrement à partir de 0 en ajoutant 1, lequel n'est jamais achevé. D'autre part, le *résultat*, hypothétique certes, de ce processus s'il était effectivement achevé. L'infini comme processus inachevé, Aristote (III, 7)<sup>11</sup> le nomme potentiel ou en puissance ; l'infini comme résultat, si achèvement il y avait, il le nomme actuel ou en acte. Dire que le temps se prolonge indéfiniment n'est pas considérer l'éternité en acte ; pas plus que dire qu'un segment peut toujours être divisé en deux n'est dire qu'il est actuellement constitué d'une infinité de points. La tradition a bien sûr retenu ce point de vue où l'infini n'existe qu'en puissance : il ne serait pas en permanence mais en devenir. Leibniz, malgré une métaphysique infinitiste, s'est d'ailleurs maintenu dans cette tradition.

Mais un pas a été définitivement franchi avec Cantor, qui n'a pas hésité (ou si peu) à parler de d'ensembles et de nombres infinis. Son idée féconde est la suivante : bien qu'un ensemble infini ne soit pas énumérable, il est possible de savoir si deux ensembles infinis ont le même nombre d'éléments. Deux ensembles infinis ont le même nombre d'éléments, c'est-à-dire qu'ils sont *équipotents*, s'il existe une *bijection* (correspondance un à un des éléments) de l'un à l'autre. Un aspect paradoxal est alors le fait qu'un ensemble infini puisse présenter une bijection avec l'un de ses sous-ensembles stricts ; c'est le cas notamment des entiers naturels et des carrés de ces entiers. L'existence des ordinaux infinis est donc assurée par l'axiome de l'infini (von Neumann & Bernays, ou Zermelo & Fraenkel) : il y a un

---

<sup>11</sup> ARISTOTE, *La physique*. Paris, Vrin, 2005.

ensemble tel que  $\emptyset \in x$ , et tel que pour chaque ensemble  $u \in x$  on a  $u \cup \{u\} \in x$ . Le premier nombre ordinal transfini est noté  $\omega$  et n'a pas de prédécesseur immédiat ; il correspond à l'ensemble des nombres entiers naturels  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Les ordinaux sont totalement ordonnés au sens large par l'inclusion ou au sens strict par l'appartenance, mais ne forment pas un ensemble au sens des axiomes de Zermelo-Fraenkel (la théorie des ensembles habituelle), mais une classe propre. Ainsi, selon les mots de Russell (1914), les nombres infinis possèdent la propriété de la *réflexivité*, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent être augmentés en leur ajoutant l'unité. Il va de soi que l'infini ne peut être obtenu par induction ou par adjonction incessamment répétée à partir d'un nombre fini et d'une suite finie d'opérations quelconques.

Le traitement mathématique des nombres transfinis ne devrait toutefois pas confondre le physicien. Qu'il soit possible de parler de façon intelligible, voire même précise, de nombres infinis ne signifie pas que l'infini *actuel* ait gagné de nouveaux droits, du moins en physique. Il n'y a pas d'ensembles infinis mesurables empiriquement ; ni collections infinies d'objets, ni durées infinies. La simple notion de mesure implique une « unité », un intervalle étalon. En physique, il n'y a pas d'infini actuel, que des infinis potentiels. Bien entendu, la mathématisation (croissante) de cette discipline depuis Galilée a permis des progrès théoriques considérables, mais elle a aussi imposé les contraintes inhérentes à cette formalisation ainsi qu'à son interprétation. La puissance de l'outil ne doit pas faire perdre de vue son objet.

Comme le souligne Poincaré (1902), le caractère essentiel du raisonnement par récurrence est qu'il contient, en une formule condensée, une infinité de syllogismes. Il s'agit d'un instrument qui permet de passer du fini à l'infini. Mais il s'agit néanmoins d'un raisonnement qui ne change en rien le contenu de son application, ou seulement sa portée, en ce sens qu'il généralise. Il n'y a de science que dans le général, disait déjà Aristote. Aussi, la procédure inductive permet-elle de poursuivre le contenu empirique au-delà des limites temporelles qui l'affectent. De sorte que « chaque jugement, quelle que soit la singularité de son objet, fait [...] référence à l'infini, dans la mesure où le contenu qu'il implique s'ouvre à la totalité des temps et doit à cette totalité même la possibilité de se perpétuer, en régénérant

incessamment son identité essentielle<sup>12</sup>». L'infini peut bien être l'attribut d'une classe, « embrassée par l'esprit », mais il ne peut être l'attribut d'un système physique. Il faut voir à ne pas confondre intelligibilité et réalité. S'il y a de l'infini dans le monde physique, il ne peut être que *potentiel*.

Cela s'applique évidemment en propre aux séries temporelles, autrement dit aux durées. Car aussi loin dans le futur qu'une série temporelle puisse s'étendre, il y aura toujours un nombre fini d'heures, de secondes, etc., qui la séparera du présent. Même si le futur était infini, aucun moment futur ne sera à un nombre infini d'heures, de secondes, etc., du présent. L'infini temporel signifie « capable de continuer<sup>13</sup> ». En ce sens, il se peut qu'il n'y ait pas de dernier instant : chaque instant est le dernier lorsqu'il se produit, mais il peut être suivi par d'autres instants. Or les instants qui suivent sont toujours potentiels. Quel est le sens, en effet, de la question : que s'est-il passé *juste avant* l'infini ? Ou encore : quelle quantité doit-on enlever à l'infini pour qu'il devienne fini ?

Le paradoxe de Zénon peut être à cet égard riche d'enseignement. Dans l'une de ses formulations, il stipule qu'Achille ne peut terminer une course, car on ne peut traverser un nombre infini de points en un temps fini : on doit traverser la moitié de la distance avant de traverser le tout, et la moitié de la moitié, ainsi *ad infinitum*. Dans une autre formulation, les instants sont considérés. Il est vrai qu'une infinité de points sont traversés et qu'une infinité d'instantes auront passé (potentiellement). Il est cependant faux de dire qu'un nombre infini de points ou d'instantes donne une distance infinie ou un temps infini. Car, si la moitié de la distance prend la moitié d'une minute à traverser, et la moitié de la moitié, ainsi de suite, alors le trajet total prend tout de même une minute. Bien qu'il y ait un ensemble dense et continu de points traversés, dans l'espace ou dans le temps, *tous* les points ne sont pas atteints ou impliqués ou même touchés par cette traversée. Les *intervalles* sont finis et, partant, la totalité est aussi finie.

---

<sup>12</sup> Ernst CASSIRER, *Substance et fonction. Éléments pour une théorie du concept*, Paris, Les Éditions de Minuit, 1910 (1977), p.280.

<sup>13</sup> Pamela M. HUBY, « Kant or Cantor? That the Universe, If Real, Must Be Finite in Both Space and Time » dans *Philosophy*, vol. 46, no. 176, 1971, p. 127.

On ne peut donc conclure, dans le précédent exemple, qu'Achille ne dépassera jamais la tortue.

### Infini et ergodicité

Il y a, bien entendu, quelques problèmes d'ordre physique et philosophique avec l'introduction des temps infinis dans la théorie ergodique.

(1) D'abord, la moyenne temporelle est intéressante parce qu'elle est expérimentalement accessible : il est espéré qu'elle représente la valeur d'équilibre de  $f$ . Toutefois, la limite  $T \rightarrow \infty$  ne nous dit rien à propos de ce qui se passe en un temps fini. Ce qui est empiriquement accessible est, au mieux, la moyenne temporelle de  $f$  pour un temps très grand mais tout de même fini. Or, cette expression peut dévier beaucoup de la valeur limite.

Alors, y a-t-il une signification *physique* (une correspondance) aux quantités infinies ? D'abord, il n'y a pas de *continuité* entre un très grand nombre et l'infini  $\infty$ , car l'infini ne peut être obtenu par induction à partir d'un nombre fini quelconque : les nombres infinis et transfinites ( $\aleph$  et  $\aleph_0$ ) ne peuvent recevoir un traitement extensionnel. Si tel est le cas, on ne peut inférer, par induction, d'une *tendance* vers l'équilibre pour des *temps très grands* à un comportement déterminé à l'équilibre pour un temps *infini*. Bien sûr, la connaissance du taux de convergence permettrait de préciser le comportement de la fonction vers une limite, mais cette information n'est pas disponible dans l'« entreprise fondatrice » de la mécanique statistique. Ainsi, l'infini représente une limite vers laquelle tendent les nombres naturels, mais cette limite n'existe pas comme résultat au sens où une fonction y conduit, c'est-à-dire par des opérations successives déterminées. Un temps infini n'existe pas et l'équilibre qui lui est associé n'est pas plus atteignable. Autrement dit, il y a un « saut » infranchissable. Changer « infini » par « fini mais très grand » ne permet pas d'obtenir l'égalité recherchée<sup>14</sup>.

Mais la question qui demeure est de savoir pourquoi les mesures sont censées rendre des valeurs moyennes. Même si les mesures

---

<sup>14</sup> Lawrence SKLAR, « Statistical Explanation and Ergodic Theory » dans *Philosophy of Science*, vol. 40, no. 2, 1973, p. 211.

réelles prennent un certain temps qui peut être long comparativement à l'échelle microscopique, pourquoi cela entrainerait-il que ce qui est mesuré correspond à une moyenne temporelle ? En fait, il est supposé que les quantités physiques macroscopiques, comme la pression ou la température, d'un système à l'équilibre sont invariantes dans le temps, malgré l'incessante variation des quantités physiques microscopiques<sup>15</sup>, comme la vitesse (directionnelle). Pour un tel système dans un contenant de volume  $V$ , la pression  $P$  exercée par les  $N$  sous-systèmes microscopiques, comme les molécules, est donnée par  $P = k_B N T_a V^{-1}$ , où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $T_a$  la température absolue<sup>16</sup>. Cette formule correspond à la somme des quantités de mouvement des molécules sur les parois. Il s'agit bien d'une somme rapportée par unité de surface (comme se doit de l'être l'expression d'une pression), mais le temps n'est pas impliqué dans cette formulation.

(2) Ensuite, la moyenne temporelle  $f^*$  peut exister alors que le système n'est pas à l'équilibre. En d'autres termes, la limite que représente  $f^*$  peut exister, alors que la limite de  $f(T, x_0)$  n'existe pas. Par exemple, pour un mouvement périodique (uniformément amorti ou non), la limite de la moyenne existe (en l'occurrence la moyenne des extrema pour un système simple), mais la limite de la fonction n'existe pas, justement en raison du mouvement périodique.

Surtout, tout résultat de mesure du système dynamique ne peut correspondre à la moyenne temporelle infinie, car il est possible de mesurer et d'observer des changements chez un système dynamique. En effet, des mesures consécutives donnent souvent des résultats différents ; autrement on ne pourrait observer des processus de non-équilibre. Cependant, la moyenne temporelle infinie reste la même pour un même système. On ne peut donc conclure que les mesures correspondent *toujours* aux moyennes temporelles infinies.

(3) Enfin, empiriquement, l'équilibre du système physique est généralement atteint rapidement. Toutefois, le temps  $T$  nécessaire pour que  $f^*$  soit près de  $\langle f \rangle$  dans le cas microcanonique peut être énorme – de l'ordre de la « petite patience » de Poincaré, soit plus de  $10^{100}$  années ! Y a-t-il alors vraiment adéquation empirique ?

<sup>15</sup> Cela renvoie bien sûr à la notion d'émergence.

<sup>16</sup> Daijiro YOSHIOKA, *Statistical Physics. An introduction*, Berlin, Springer-Verlag, 2007, p.19.

Rappelons enfin que pour un ensemble infini, il n'y a pas d'entier  $n$  permettant une bijection entre  $\{1, 2, \dots, n\}$  et cet ensemble. Comment dans ce cas procéder à l'« attribution » des coordonnées de l'espace des phases et dans le temps ?

Un mot sur l'ergodicité version Boltzmann. Il a été souligné que celle-ci ne tenait pas. Boltzmann croyait que, compte tenu du fait que le chemin-G passe par un ensemble dense de points, il passait tôt ou tard par tous les points de l'hypersurface d'énergie, et qu'en conséquence la moyenne temporelle égalait la moyenne en phase. Il s'agit, en quelque sorte, du paradoxe de Zénon : on ne peut conclure à une trajectoire infinie à partir d'une infinité de points parcourue. En effet, il n'est pas possible d'obtenir une bijection (correspondance continue un à un) d'un espace à une dimension à un espace à deux dimensions ou plus : une trajectoire dynamique est un ensemble unidimensionnel continu qui ne s'intersecte jamais sur une surface pluridimensionnelle d'énergie constante. Si la courbe de Peano peut couvrir un espace à plusieurs dimensions avec une courbe continue à une dimension, la correspondance n'est pas une bijection<sup>17 18</sup>.

Par ailleurs, afin de maintenir les principes de la thermodynamique, il importe, dans un premier temps, que les temps  $t_c$  et  $t_m$  existent, c'est-à-dire qu'il y ait un temps où les interactions moléculaires s'estompent et un temps où une propriété macroscopique (thermodynamique) quelconque ne change pas (à l'équilibre). Dans un second temps, il importe que la moyenne temporelle soit indépendante du temps. Considérant que tout système (quasi) isolé atteint l'équilibre après un temps « suffisamment long », il est généralement supposé que  $f^*(T) = f^*$  si  $t_m = \infty$  ; d'où l'indépendance par rapport au temps recherchée. Or, considérant qu'un système tend vers l'équilibre et s'y maintient, la moyenne temporelle est toujours égale à la valeur à l'équilibre lorsque  $T \rightarrow \infty$ . Étant donné  $T, x_0 = x$  et la préservation de la mesure (théorème de Liouville),  $\langle f \rangle$  est indépendante du temps et en conséquence, par commutativité

---

<sup>17</sup> M. TODA, R. KUBO et N. SAITO, *Statistica Physics I. Equilibrium statistical mechanics*, Berlin, Springer, 1983 (1998), p. 178.

<sup>18</sup> G. T. KNEEBONE, *Mathematical logic and the Foundations of Mathematics. An introductory survey*, New York, Dover Publications inc., 1963 (2001), p. 152.

$$\langle f \rangle = \langle f \rangle^* = \langle f^* \rangle.$$

Finalement, puisque  $f^*(x)$  est indépendante de l'état initial  $x_0$  et constante dans  $\Gamma$ , la moyenne des phases de  $f^*$  est égale à  $f^*$ , soit  $\langle f^* \rangle = f^*$ , de sorte que  $\langle f \rangle = f^*$ <sup>19</sup>. L'indépendance ou l'invariance par rapport au temps est donc primordiale. En effet,  $f^*$  est considérée comme la valeur à l'équilibre car cette limite existe (mathématiquement et physiquement).

Les avantages (mathématiques) de travailler avec l'infini dans les moyennes temporelles, devant mener à l'ergodicité, ne sont plus aussi évidents dans le cas des *systèmes infinis*. De tels systèmes sont infinis en nombre et donc en volume ; il ne s'agit pas d'une séquence infinie de systèmes finis. Chez ces systèmes, les « effets de surface » peuvent être négligés, les difficultés de la quasi-périodicité en mécanique quantique sont éliminées, et on obtient une distinction claire entre les descriptions microscopique et macroscopique d'un système physique<sup>20</sup>. Par contre, les mathématiques se compliquent.

Pour un système infini, l'espace des phases a une dimensionnalité infinie, et on ne peut donc pas utiliser la densité de phase (distribution statistique) : il faut plutôt utiliser le concept de variable dynamique locale. Ainsi, les quantités physiques sont exprimées par des valeurs attendues (moyennes) déterminées par les corrélations locales. Ces valeurs doivent être invariantes par rapport au temps et elles peuvent l'être par ergodicité. Un état invariant est ergodique s'il ne peut être exprimé en une combinaison linéaire positive d'états ergodiques, et chaque état invariant peut être exprimé par un mélange d'états ergodiques. Il suffit donc de trouver *tous* les états ergodiques. Toutefois, la tâche de trouver *tous* les états ergodiques des systèmes infinis n'est toujours pas accomplie – évidemment. Les systèmes infinis pour lesquels l'ergodicité a été prouvée sont les gaz parfaits. Or, il est pour le moins curieux que les systèmes infinis présentant un équilibre ergodique sont ceux qui sont le moins ergodiques lorsqu'ils sont finis<sup>21</sup>. Une conclusion qui suggère que les prémisses sont fausses : il y aurait ainsi un saut logique du fini à l'infini.

---

<sup>19</sup> TODA et al., *Op. cit.*

<sup>20</sup> Oliver PENROSE, « Foundations of statistical mechanic » dans *Report on Progress in Physics*, vol. 42, 1979, p. 1964.

<sup>21</sup> *Ibid.*



Dans l'Équation 1, il semble que l'infini potentiel soit en jeu en raison de cette tendance  $T \rightarrow \infty$ , mais il n'en est rien car il s'agit plutôt de l'infini actuel comme résultat  $f^*$ ; en effet, l'argument mathématique  $\infty$  est appliqué pour calculer une valeur. Dans ce cas, il n'est pas question de généraliser un comportement physique à l'ensemble des temps, mais d'inclure, dans le calcul d'une valeur moyenne, la contribution de tous les instants, séparés d'un nombre fini puis infini d'unités temporelles du présent, à cette même valeur. En ce sens, cette valeur, censée représenter le résultat de la mesure empirique, est « influencée » – comme une moyenne l'est de la somme des valeurs – par le comportement extrapolé à des instants absolument inaccessibles à la mesure. Le contenu empirique n'est pas poursuivi au-delà des limites temporelles qui l'affectent, mais au-delà de *toutes* limites temporelles. Or, tel que défendu précédemment, aucun moment futur n'est séparé d'un nombre *infini* d'unités temporelles du présent.

Il appert donc que la physique n'a pas trouvé autant de réconfort dans l'infini que les mathématiques – pour peu qu'elle y trouve le repos. La danse qu'elles ont entreprise ensemble depuis quelques siècles continue d'émouvoir par sa beauté et parfois même par sa simplicité. Les mathématiques semblent guider le pas depuis longtemps sous prétexte qu'elles connaissent la musique. Mais elles semblent aussi, parfois, perdre le rythme. Sous prétexte de calculs, que faut-il comprendre aux systèmes *infinis* appliqués à des gaz *parfaits*? Ce qui fait office d'outil pédagogique peut souvent s'avérer nuisible dans l'analyse des fondements d'une discipline telle la physique.

## Conclusion

Les moyennes temporelles en mécanique statistique sont considérées comme empiriquement significatives, puisqu'elle sont censées correspondre aux valeurs mesurées. Il est aussi considéré que le temps d'une mesure est supérieur à celui nécessaire à la disparition des corrélations moléculaires, mais inférieur au temps maximum où la quantité physique macroscopique ne change pas. Or ce dernier temps peut être considéré comme infini, et c'est pourquoi les moyennes temporelles infinies sont utilisées. De plus, un temps infini permet

l'indépendance par rapport au temps nécessaire pour rendre compte du comportement à l'équilibre des systèmes physiques. Par contre, les moyennes temporelles sont difficilement calculables, contrairement aux moyennes des phases. Le problème ergodique revient donc à justifier l'égalité des moyennes temporelles infinies et des moyennes de phase.

L'introduction de temps infinis n'est pas sans poser problème en physique. L'infini en physique peut être soit la propriété d'un raisonnement par récurrence autorisant une généralisation, soit la capacité potentielle d'un système à poursuivre sans limite un comportement dans le temps et dans l'espace. En dépit des mathématiques cantorienne, il n'est pas question d'infini actuel en physique. En effet, il faut voir à ne pas confondre l'objet d'étude et le raisonnement qui l'affecte. En ce sens, l'infini peut bien intervenir dans la construction théorique devant rendre compte d'un phénomène, qui n'en reste pas moins fini. Heureusement pour ceux et celles qui souhaitent tester empiriquement leurs théories.

Il y a d'abord le problème de l'empiricité ou, plus précisément, de l'adéquation empirique de l'ergodicité. D'une part, la justification quant à l'utilisation des moyennes temporelles pour représenter la valeur d'une mesure reste faible. D'autre part, si justification satisfaisante il y avait, les moyennes temporelles infinies resteraient néanmoins problématiques. Ce qui est empiriquement accessible sont les moyennes temporelles pour des temps finis et non pas infinis : que se passe-t-il avant l'infini ? Aussi, si tel était le cas, on ne pourrait observer de changement, ce qui n'est pas vérifié expérimentalement. Ensuite, il y a le danger de transposer un concept mathématique à la physique sans examen critique. La physique, si abstraite et mathématisée soit-elle, peut bien se passer de l'infini actuel. Celui-ci ne survit pas à l'expérience et à l'examen. Autrement, le pauvre Achille est condamné à faire du surplace.

### Bibliographie

- ARISTOTE, *La physique*, Paris, Vrin, 2005.
- BARBEROUSSE, Anouk, *La mécanique statistique. De Clausius à Gibbs*, Paris, Belin, 2002.
- BRIN, Michael, et Garrett STUCK, « Introduction to Dynamical Systems » dans Internet (ed.), Cambridge, Cambridge University Press, 2003.
- CASSIRER, Ernst, *Substance et fonction. Éléments pour une théorie du concept*, Paris, Les Éditions de Minuit, 1910 (1977).
- EARMAN, John, et Miklós REDEI (1996), « Why Ergodic Theory Does Not Explain the Success of Equilibrium Statistical Mechanics » dans *The British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 47, no. 1, 1996, p. 63-78.
- EHRENFEST, Paul, et Tatiana EHRENFEST, *The conceptual foundations of the statistical approach in mechanics*, New York, Dover Publications inc., 1912 (1990).
- FLETCHER, Peter, « A Constructivist Perspective on Physics » dans *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 3, 2002, p. 26-42.
- GALLAVOTTI, Giovanni, « Ergodicity, ensembles, irreversibility in Boltzmann and beyond » dans *arXiv:chao-dyn/9403004v1*, 1994.
- HAMILTON, A. G., *Numbers, sets and axioms. The apparatus of mathematics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1982.
- HILBERT, David, « Sur l'infini » dans *Acta Mathematica*, vol. 48, 1926, p. 91-122.
- HUBY, Pamela M., « Kant or Cantor? That the Universe, If Real, Must Be Finite in Both Space and Time » dans *Philosophy*, vol. 46, no. 176, 1971, p. 121-132.
- KHINCHIN, A.I., *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*, New York, Dover Publications inc., 1949.
- KNEEBONE, G. T., *Mathematical logic and the Foundations of Mathematics. An introductory survey*, New York, Dover Publications inc., 1963 (2001).
- MACKAY, George W., « Ergodic Theory and Its Significance for Statistical Mechanics and Probability Theory » dans *Advances in Mathematics*, vol. 12, 1974, p. 178-268.

- PENROSE, Oliver, « Foundations of statistical mechanic » dans *Report on Progress in Physics* vol. 42, 1979, p. 1937-2006.
- POINCARÉ, Henri, *La science et l'hypothèse*, Paris, Champs-Flammarion, 1902 (1968).
- RUSSELL, Bertrand, *Our knowledge of the external world*, Oxon, Routledge, 1914 (2006).
- SEIDENGART, Jean, « Infini » dans Dominique Lecourt (éd.), *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences*, Paris, Quadrige-PUF, 1999 (2003).
- SKLAR, Lawrence, « Statistical Explanation and Ergodic Theory » dans *Philosophy of Science*, vol. 40, no. 2, 1973, p. 194-212.
- SKLAR, Lawrence, *Physics and Chance*, Cambridge, Cambridge University Press, 1993.
- TODA, M., R. KUBO, et N. SAITO, *Statistica Physics I. Equilibrium statistical mechanics*, Berlin, Springer, 1983 (1998).
- TOLMAN, Richard C., *The Principles of Statistical Mechanics*, London, Oxford University Press, 1938 (1950).
- UFFINK, Jos, « Compendium of the foundations of classical statistical physics » dans Internet, 2006 (2009).
- VAN LITH, Janneke, « Ergodic Theory, Interpretations of Probability and the Foundations of Statistical Mechanics » dans *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, vol. 32, no. 4, 2001, p. 581-594.
- YOSHIOKA, Daijiro, *Statistical Physics. An introduction*, Berlin, Springer-Verlag, 2007.